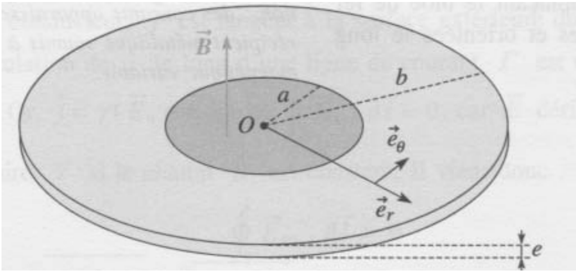


PERTES PAR COURANT DE FOUCAULT

La relation entre le champ électrique et la densité volumique de courant est :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Le champ est le champ électromoteur créé par la variation de $\vec{B} = Bmcos\omega t\ \vec{e}z$ et on sait que :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'autre part tous les plans ($\vec{e}$r $\vec{e}$z) sont des plans de symétrie pou $\vec{B}$: $\vec{E}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires à ses plans, le plan du disque est un plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$ donc $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont tangents au cercle de centre o dans le plan du disque leurs valeurs ne dépendent que de la distance r au centre du cercle.

$\vec{J} = J(r,t)\vec{e}_\theta$ les lignes de courant sont circulaires et ces courants provoquent des échauffements par effet Joule dans le disque. Cette puissance est parfois utile : chauffage par induction parfois indésirable : pertes par courant de Foucault dans les transformateurs.

Dans ces conditions l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques est :

sur la composante verticale uniquement

$$\frac{1}{r}\frac{d(rj)}{dr} = -\gamma \frac{\partial B}{\partial t}$$

D'où :

$$\vec{j} = \gamma \frac{r}{2} Bm\omega sin\omega t \vec{e}_\theta$$

Remarque : on aurait pu le calculer en considérant une spire élémentaire parcouru par le courant I =Js. La FEM induite (la loi de Faraday) est

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

D'où si R désigne la résistance de la spire :

$$I = -\frac{\pi r^2}{R}\frac{dB}{dt} = -\frac{\pi r^2}{\frac{2\pi r}{\gamma s}}\frac{dB}{dt} = \gamma\frac{r}{2}sBm\omega sin\omega t$$

S est la section de la spire élémentaire. D’où j=I/s

La puissance volumique perdue par effet Joule est :

$$\frac{dp(t)}{dv} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}$$

$$d^2p(t) = \gamma(\frac{r}{2}Bm\omega sin\omega t)^2 red\theta dr$$

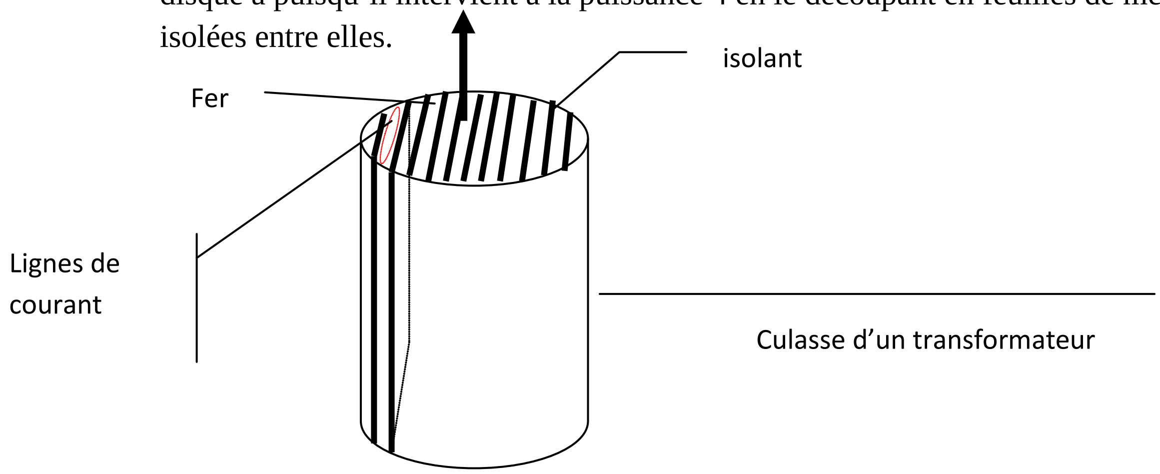
$$p(t) = \int_0^a \frac{\gamma}{4}(Bm\omega sin\omega t)^2 r^3 e(2\pi)dr$$

D’où

p(t)= $\frac{\gamma e\pi}{8}(Bm\omega sin\omega t)^2a^4)$ la valeur moyenne sera :

$$P = \frac{\gamma e\pi}{16}Bm^2\omega^2a^4$$

Pour minimiser ces pertes dans un transformateur on **diminue** au maximum le rayon du disque a puisqu’il intervient à la puissance 4 en le découpant en feuilles de métal très **minces** isolées entre elles.



Le champ induit par une spire élémentaire de rayon r est :

$$dBi = \frac{\mu oj}{2r}edr = \gamma\frac{\mu oe}{4}Bm\omega sin\omega tdr$$

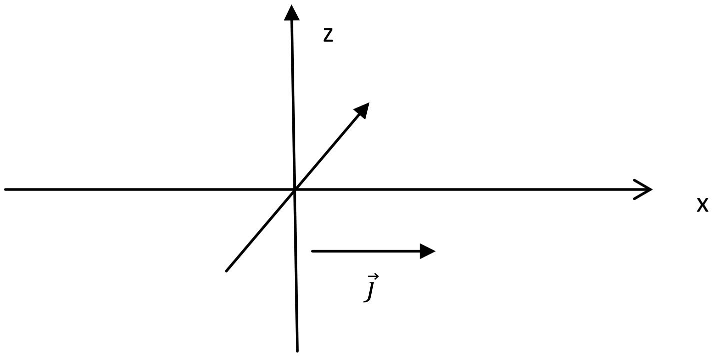
Soit

$$Bi = \gamma\frac{\mu oea}{4}Bm\omega sin\omega t$$

Il faut donc pour le négliger

$$\gamma \frac{\mu o e a}{4} \omega \ll 1$$

Effet de peau



Le plan oz est un plan de symétrie de la distribution (B⊥ xoz) de courant et le plan xoy un plan d'antisymétrie (B∈ xoy) donc le champ est selon l'intersection de ces deux plans soit selon $\vec{e}$y.

Dans un conducteur $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu 0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ on néglige le deuxième terme dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires.

Si le champ électrique est sinusoïdal le champ B le sera : en posant :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = E e^{i(\omega t)} \vec{e}x,$$

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu 0 \gamma \vec{E}$;

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \overrightarrow{rot}(\mu 0 \gamma \vec{E})$; $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$

$\Delta \vec{B} = \mu 0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ où $\Delta \vec{j} = \mu 0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$

Comme B est selon oy et ne dépend que de z (invariance selon ox et oy) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial z^2} = \mu 0 \gamma i \omega \underline{B}$$

Même chose pour j selon ox ne dépend que se z

$$\frac{\partial^2 \underline{J}}{\partial z^2} = \mu 0 \gamma i \omega \underline{J}$$

La solution de cette équation passe par la résolution de l'équation caractéristique $\underline{r}^2 = \mu 0\gamma i\omega$

Soit $\underline{r} = \pm\sqrt{\mu 0\gamma i\omega} = \pm\sqrt{i}\sqrt{\mu 0\gamma\omega} = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\mu 0\gamma\omega} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu 0\gamma\omega}$

La solution est de la forme :

$$\underline{J} = \underline{A}e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu 0\gamma\omega}z} + \underline{A}'e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu 0\gamma\omega}z}$$

A doit être nul car la densité de courant divergerait pour z tendant vers $-\infty$

D'où

$$\underline{J} = \underline{A}'e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu 0\gamma\omega}z}$$

Et

$$\underline{j} = \underline{A}'e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu 0\gamma\omega}z}e^{i\omega t} = \underline{A}'e^{\sqrt{\frac{\mu 0\gamma\omega}{2}}z}e^{i\left(\omega t+\sqrt{\frac{\mu 0\gamma\omega}{2}}z\right)}$$

Ou en revenant au réel :

$$j(t) = J(0)e^{\sqrt{\frac{\mu 0\gamma\omega}{2}}z}\cos\left(\omega t + \sqrt{\frac{\mu 0\gamma\omega}{2}}z\right)$$

Décroissance rapide de j dans le conducteur on parle de profondeur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu 0\gamma\omega}}$

Pour un conducteur en cuivre, on a les valeurs ci-dessous.

fréquence	**δ**
50 Hz	9,38 mm
60 Hz	8.57 mm
10 kHz	0.66 mm
100 kHz	0.21 mm
1 MHz	66 µm
10 MHz	21 µm

Energie emmagasinée dans une Bobine :

Dans l'ARQP

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu o\vec{j}$$

1)°A l'intérieur du solénoïde les plans perpendiculaires à oz sont des plans de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ces plans est dirigé selon oz D'après le théorème d'Ampère la circulation sur le contour fermé OO'U'U est égale à la somme algébriques des courants enlacés : $B(O).l - B(U).l = \mu onlI$ or à l'extérieur B(U)=0 donc B(O)= μonI

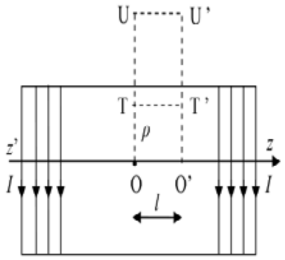


Figure 6'

2°) Energie volumique emmagasinée $Em = \frac{B^2}{2\mu o} = \frac{\mu on^2I^2}{2}$

Sur une longueur l l'énergie totale sera $Em = \frac{\mu on^2I^2}{2}Sl = \frac{LI^2}{2}$ on retrouve L=$\frac{\mu oN^2}{l}S$

AN : L=10mH

3°) le courant dans la bobine est régi par l'équation :

E=Ri+Ldi/dt dont la solution

$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

4°) Le champ B dans le solénoïde varie donc il apparaît un Champ électrique de révolution porté par $\vec{e}\varphi$ autour de oz ne dépendant que de la distance à l'axe.

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

En coordonnée cylindrique sur la composante z :

$$\frac{1}{r}\frac{d(rE)}{dr} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

D'où

$$\vec{E} = -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\vec{e}\varphi$$

Avec

$$\vec{B} = \mu on \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\vec{e}\mathrm{z}$$